模块四 分段函数问题

第 1 节 分段函数基础题型（★★☆）

内容提要

本节主要归纳两类常见的分段函数基础题型.

1．分段函数求值：包括给自变量求函数值，给函数值求自变量. 我们将从最简单的给分段函数 $f(x)$ 的解析式，让求 $f(x_0)$ 这类求值问题出发，演变到求 $f(f(x_0))$，再到给 $f(x_0)$，让求 x_0，以及给 $f(f(x_0))$，求 x_0 等一系列问题，通过解决这些问题，我们可以逐步感悟分类讨论、数形结合的数学思想在解决分段函数问题中的广泛应用.

2．根据分段函数的单调性求参数范围：这类题考虑下面两点即可.

①每一段的单调性；②分段点左右两侧的大小.

典型例题

类型Ⅰ：分段函数求值

【例 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, x>2 \\ x^2+2, x\le 2 \end{cases}$，则 $f(2)=$_____.

解析： 2 位于 $x\le 2$ 这段，代入解析式即可，$f(2)=2^2+2=6$.

答案： 6

【变式 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, x>2 \\ x^2+2, x\le 2 \end{cases}$，则 $f(f(1))=$_____.

解析： 双层函数值计算，先计算里面那一层，$f(1)=1^2+2=3$，所以 $f(f(1))=f(3)=3-1=2$.

答案： 2

【变式 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, x>2 \\ x^2+2, x\le 2 \end{cases}$，若 $f(a)=3$，则 $f(a-1)=$_____.

解析： 因为不确定 a 与 2 的大小关系，所以通过分类讨论，代入解析式，

当 $a>2$ 时，则 $f(a)=a-1=3$，解得：$a=4$，所以 $f(a-1)=f(3)=3-1=2$；

当 $a\le 2$ 时，则 $f(a)=a^2+2=3$，解得：$a=\pm 1$，

若 $a=-1$，则 $f(a-1)=f(-2)=(-2)^2+2=6$；若 $a=1$，则 $f(a-1)=f(0)=0^2+2=2$；

综上所述，$f(a-1)=6$或 2.

答案： 6 或 2

【反思】 分段函数问题中，不确定自变量处于哪一段时，可以分类讨论，但各类情况下求得的结果，必须检验是否满足讨论的前提.

【变式 3】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1,x>2\\x^2+2,x\le 2\end{cases}$，若 $f(f(x))=2$，则 $x=$______.

解析：看到复合结构的方程，考虑将内层的 $f(x)$ 换元，化整为零，

令 $t=f(x)$，则 $f(f(x))=2$ 即为 $f(t)=2$，

下面先由此解 t，因为 $f(x)$ 的解析式较为简单，容易画图，所以可结合图象来解方程 $f(t)=2$，

函数 $y=f(t)$ 的图象如图 1，由图可知直线 $y=2$ 与该图象有 A，B 两个交点，横坐标分别为 0 和 2，

所以方程 $f(t)=2$ 的解为 $t=0$ 或 3，故 $f(x)=0$ 或 $f(x)=3$，

接下来又可通过观察直线 $y=0$ 和 $y=3$ 与 $f(x)$ 图象的交点，来解这两个方程，

如图 2，直线 $y=0$ 与 $y=f(x)$ 的图象没有交点，直线 $y=3$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 D，E，F 三个交点，

它们的横坐标分别为 -1，1，4，所以 $x=\pm 1$ 或 4.

答案：4 或 ± 1

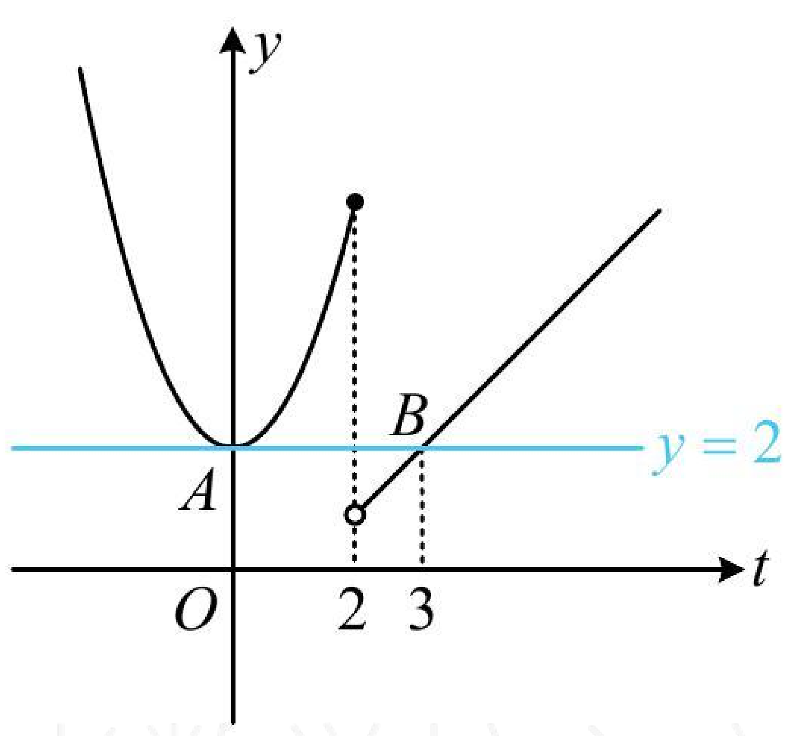

图1

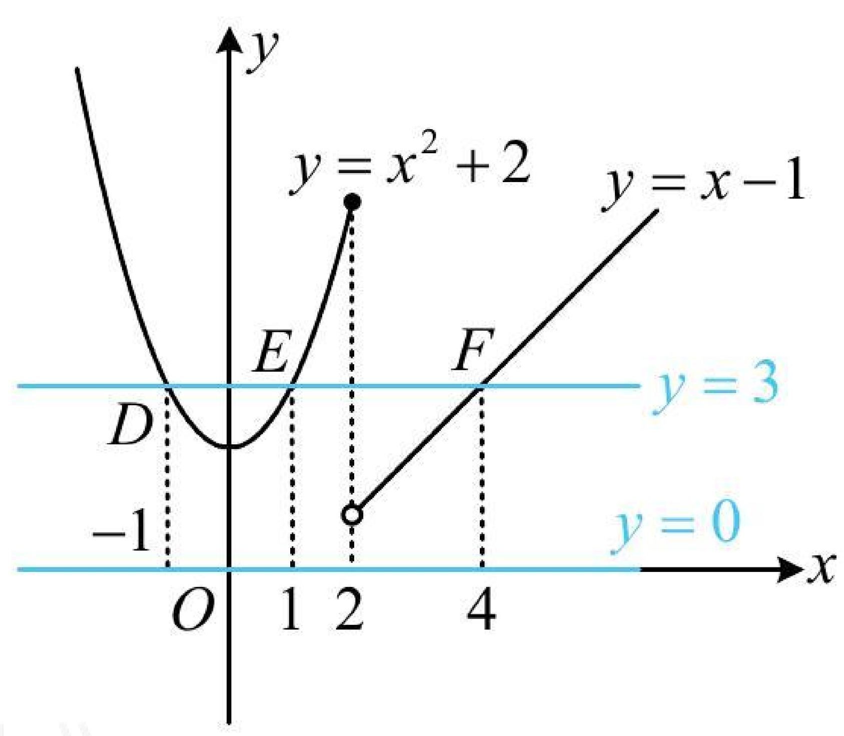

图2

【总结】对于分段函数，若给自变量求函数值，只需注意该代哪一段即可；而若给函数值，让求自变量，则需讨论自变量在各段的情形；若给出 $f(f(a))$ 让求 a，可先令 $t=f(a)$，通过画图求出 t，再来求 a.

类型Ⅱ：根据分段函数的单调性求参数范围

【例 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x,x>1\\(4-\dfrac{a}{2})x+2,x\le 1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围为（　　）

（A）$(1,+\infty)$　　（B）$[4,8)$　　（C）$(4,8)$　　（D）$(1,8)$

解析：分段函数整体单调，分别考虑每一段的单调性，以及间断点处的拼接情况即可，

首先，$f(x)$ 在两段上均↗，所以 $\begin{cases}a>1\\4-\dfrac{a}{2}>0\end{cases}$，解得：$1<a<8$；

其次，间断点处，应有 $4-\dfrac{a}{2}+2\le a$，解得：$a\ge 4$，故实数 a 的取值范围为 $[4,8)$.

答案：B

【变式】已知函数 $f(x)=\begin{cases}(4-a)x-5,x\le 8\\a^{x-8},x>8\end{cases}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $\{a_n\}$ 是递增数列，则实数

a 的取值范围为_____.

解析： $\{a_n\}$是递增数列$\Rightarrow a_n<a_{n+1}$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立$\Rightarrow f(n)<f(n+1)$恒成立，

除了$f(x)$在两段上要分别↗外，此处由于是数列$\{f(n)\}$↗，所以间断点处只需$f(8)<f(9)$即可，

所以应有$\begin{cases}4-a>0\\a>1\\8(4-a)-5<a\end{cases}$，解得：$3<a<4$.

【总结】给出分段函数的单调性，让求参数范围，这类题除了考虑各段的单调性外，还需注意间断点处的拼接情况，若为增函数，则间断点右侧不能在下方，若为减函数，则间断点右侧不能在上方.

答案： $(3,4)$

强化训练

1．（2021·浙江卷·★）已知$a\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}x^2-4,x>2\\|x-3|+a,x\le 2\end{cases}$，若$f(f(\sqrt{6}))=3$，则$a=$_____.

2．（2022·辽宁沈阳模拟·★★）设$f(x)=\begin{cases}x-2,x\ge 10\\f(f(x+6)),x<10\end{cases}$，则$f(5)=$（　）

（A）8　（B）9　（C）10　（D）11

3．（2022·河北模拟·★★）已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2,x\le 1\\-\log_2(x+1),x>1\end{cases}$，且$f(a)=-3$，则$f(6-a)=$（　）

（A）$-\frac{7}{4}$　（B）$-\frac{5}{4}$　（C）$-\frac{3}{4}$　（D）$-\frac{1}{4}$

4．（★★★）已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=x-1$，若$f(f(x))=1$，则$x=$_____.

5．（2022·甘肃模拟·★★）若函数$f(x)=\begin{cases}(a-1)x-2a,x<2\\\log_a x,x\ge 2\end{cases}$在$\mathbf{R}$上单调递减，则实数$a$的取值范围为_____.

6.（★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax-1,x\le 1\\ \ln(2x^2-ax),x>1\end{cases}$ 在 **R** 上为增函数，则实数 a 的取值范围是_____.

7.（2022 • 达州二诊 • ★★★）已知单调递增的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}m^{n-9},n\ge 10\\ (\frac{2m}{9}+1)n-21,n<10\end{cases}$，则实数 m 的取值范围是（　　）

（A）$[12,+\infty)$　（B）$(1,12)$　（C）$(1,9)$　（D）$[9,+\infty)$

8.（2022 • 北京西城二模 • ★★★）若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+3,x\le 0\\ (x-2)^2,0<x\le a\end{cases}$ 的定义域和值域的交集为空集，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,1]$　（B）$(0,1)$　（C）$(1,4)$　（D）$(2,4)$